Zur nichtlinearen Spinortheorie der Elementarteilchen

Von K. Ladányi

Forschungsgruppe für Theoretische Physik der Ungarischen Akademie der Wissenschaften, Budapest

(Z. Naturforschg. 16 a, 79—91 [1961]; eingegangen am 17. August 1960)

A unified nonlinear theory of elementary particles is introduced and analyzed. In I. the convergence problem of the "new Tamm–Dancoff method" is studied. In II. an approximation method is given for the solution of the covariant equation of the propagator neglecting the four-point- and higher correlations. The solution fulfilling certain general physical requirements is taken in a generalized non Touschek-invariant spectral form (the Källen–Lehmann spectral form is a special case) and the integral equation of the weight function is derived. It is shown that, in case of a VA coupling a two component neutrino singularity in the commutator is consistent with equations of motion. In III. the basic ideas of a Touschek invariant theory are studied. The field of elementary particles is a ψ isodoublet-spinor, the interaction is an isoscalar VA coupling. The form of the commutator excludes for ψ the possibility of the P- and isoinvariant initial conditions. The condition for the non zero eigenvalue of the total Touschek-charge and for the non vanishing rest mass is discussed. It is further shown that the covariant two-body equation has a photon-type solution and that the charge of the neutral particles is zero. Finally a possibility for the construction of different elementary particle states is given.

In einer Reihe früherer Arbeiten wurden von Heisenberg [1] die Möglichkeiten der Quantisierung einer nichtlinearen und nicht renormierbaren Spinortheorie auf Grund der Annahme untersucht, daß in der nichtlinearen Theorie die Fortpflanzungsfunktion (der Propagator) und die Vertauschungsfunktion (der Kommutator) sich qualitativ ähnlich verhalten (obwohl der Zusammenhang nicht so eng ist, wie in der linearen Theorie). Dann besitzt die Fortpflanzungsfunktion keine δ- und δ'-funktionsartigen Singularitäten, sondern oszilliert mit wachsender Amplitude und Frequenz bei Annäherung an den Lichtkegel. Das hat zur Folge, daß die Metrik des Hilbert-Raumes indefinit ist. Mitter [2] untersucht die Fortpflanzungsfunktion einer γ^5-invarianten nichtlinearen Theorie in einer Näherung, die die Vierpunkt- und die höheren Korrelationen vernachlässigt. Es wird gezeigt, daß die Näherungsgleichung des Propagators nur eine einzige Lösung hat, die die folgenden Forderungen erfüllt: 1. Lorentz-Invarianz, 2. Mikrokausalität, 3. die üblichen Analysierbarkeitsforderungen [3], 4. Touschek-Invarianz, 5. Källen–Lehmann-Spektralform. Es ist offenbar, daß die Forderungen $1-3$ unbedingt erfüllt werden müssen. Es tritt aber im Falle 4 und 5 unserer Meinung nach eine andere Situation auf. Es ist nämlich überhaupt nicht ausgeschlossen, daß die Näherungsgleichung der Fortpflanzungsfunktion auch solche Lösungen besitzt, bei denen nur die Forderungen 1 bis 3 erfüllt sind, die Forderungen $4-5$ dagegen nicht. Der Eigenwert der „Touschek-Ladung" (s. unten) muß im Vakuumzustand natürlich gleich Null sein, es ist von vornherein aber nicht gesichert, daß die exakte Fortpflanzungsfunktion Touschek-invariant ist. (Die Dirac-Gleichung des Wasserstoffatoms ist z. B. vollständig kugelsymmetrisch, doch gibt es keine kugelsymmetrische Lösung.) Wenn das der Fall ist, so ist die Touschek-invariante Lösung der Näherungsgleichung analog den Extra-Lösungen (spurious extra solutions) der Bethe–Salpeter-Gleichung. Es ist auch nicht gewiß, daß die in der Källen–Lehmann-Spektralform exakt darstellbare Näherungs-Lösung die beste Konvergenz bringt. Dementsprechend wird eine Methode ausgearbeitet, die die annähernde Bestimmung einer nicht Touschek-invarianten und in Källen–Lehmann-Form nicht darstellbare Lösung ermöglicht. Auf Grund von unseren Ergebnissen versuchen wir in III die Konstruktion einer einheitlichen Spinortheorie der Elementarteilchen.

I. Bemerkungen zum Konvergenzproblem des „neuen Tamm-Dancoff-Verfahrens"

Die Untersuchungen werden im folgenden einfachheitshalber mit Vierkomponenten-Spinoren durchgeführt; die Verallgemeinerung der Ergebnisse mit Berücksichtigung des Isospins wird dann keine

[1] W. Heisenberg, Z. Naturforschg. **9 a**, 292 [1954], vgl. auch Anm. [15].

[2] H. Mitter, Zur Zweipunktfunktion in nichtlinearen Spinortheorien, Preprint.

[3] A. S. Wightman, Phys. Rev. **101**, 860 [1956].

Schwierigkeiten verursachen. Der Typ der Kopplung wird nicht festgelegt, so können die Ergebnisse bei beliebiger Kopplung verwendet werden. Die zugrunde gelegte nichtlineare Spinorgleichung sowie die adjungierte Gleichung können auf folgende Form gebracht werden [4]:

$$i\,\gamma^{\mu}_{\alpha\alpha'}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\,\Psi(x\,\alpha') + \Gamma_{\alpha\alpha'\gamma\delta}\!:\Psi(x\,\alpha')\,\Psi(x\,\delta)\,\overline{\Psi}(x\,\gamma):=0, \tag{1}$$

$$-i\,\gamma^{\mu\,T}_{\beta\beta'}\frac{\partial}{\partial y^{\mu}}\,\overline{\Psi}(y\,\beta') + \Gamma_{\beta'\beta\varepsilon\varphi}\!:\Psi(y\varphi)\,\overline{\Psi}(y\,\varepsilon)\,\overline{\Psi}(y\,\beta'):=0, \tag{2}$$

wo : : das übliche WICKsche Operatorprodukt bedeutet; Γ ist aus den DIRAC-Matrizen aufgebaut. Im weiteren ist die Spinorgleichung mit VA-Kopplung besonders interessant [5]:

$$-i\,\gamma^{\mu}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\,\Psi + \lambda\!:\gamma^{\mu}\,a\,\Psi(\overline{\Psi}\,\gamma_{\mu}\,\bar{a}\,\Psi): + \lambda\!:(\overline{\Psi}\,\gamma^{\mu}\,a\,\Psi)\,\gamma_{\mu}\,\bar{a}\,\Psi:=0. \tag{3}$$

In diesem Spezialfalle nimmt die Γ-Matrix die folgende Gestalt an:

$$\Gamma_{\alpha\alpha'\gamma\delta} = \lambda(\gamma^{\mu}\,a)_{\alpha\alpha'}(\gamma_{\mu}\,\bar{a})_{\gamma\delta} + \lambda(\gamma^{\mu}\,a)_{\gamma\delta}(\gamma_{\mu}\,\bar{a})_{\alpha\alpha'}\,. \tag{4}$$

Die gleichzeitigen Vertauschungsrelationen der Ψ-Operatoren sind

$$[\Psi(x^0\,\boldsymbol{x}\,\alpha),\,\overline{\Psi}(x^0\,\boldsymbol{y}\,\beta)]_+ = (C\,\gamma^0)_{\alpha\beta}\,\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}). \tag{5}$$

Für die anderen Paare ist der Kommutator gleich Null. Die Matrix C muß so erwählt werden, daß die Vertauschungsrelationen sowie die Bewegungsgleichung (1) verträglich sind. Folglich hängt sie von der Kopplungsart ab. Übersichtlichkeitshalber beschränken wir uns auf die Untersuchung der kovarianten Näherungsgleichung der Amplitude

$$\tau(x\,\alpha\,|\,y\,\beta) = \langle\Phi\,|\,T\,\Psi(x\,\alpha)\,\overline{\Psi}(y\,\beta)\,|\,\Phi\rangle\,. \tag{6}$$

Die Verallgemeinerung der Ergebnisse wird keine prinzipiellen Schwierigkeiten verursachen. Diese Funktion befriedigt folgendes Gleichungssystem [6]

$$-i\,\gamma^{\mu}_{\alpha\alpha'}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\,\tau(x\,\alpha'\,|\,y\,\beta) = \Gamma_{\alpha\alpha'\gamma\delta}\,\tau(x\,\alpha'\,x\,\delta\,|\,x\,\gamma\,y\,\beta) - i(\gamma^0\,C\,\gamma^0)_{\alpha\beta}\,\delta(x-y), \tag{7}$$

$$i\,\gamma^{\mu\,T}_{\beta\beta'}\frac{\partial}{\partial y^{\mu}}\,\tau(x\,\alpha'\,x\,\delta\,|\,x\,\gamma\,y\,\beta') = \Gamma_{\beta'\beta\varepsilon\varphi}\,\tau(x\,\alpha'\,x\,\delta\,y\,\varphi\,|\,y\,\varepsilon\,x\,\gamma\,y\,\beta') - i\,C_{\alpha'\beta}\,\delta(x-y)\,\tau(x\,\delta\,|\,x\,\gamma) + i\,C_{\delta\beta}\,\delta(x-y)\,\tau(x\,\alpha'\,|\,x\,\gamma). \tag{8}$$

Die δ-Funktionen auf der rechten Seite der Gln. (7) und (8) stammen vom Derivate des im δ-Produkt vorkommenden Faktors $\varepsilon(x^0-y^0)$ und von der Funktion $\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$ des Kommutators. Mit Berücksichtigung von (7) und (8) folgt

$$\left(i\,\gamma^{\mu\,T}_{\beta\beta'}\frac{\partial}{\partial y^{\mu}}\right)\left(-i\,\gamma^{\nu}_{\alpha\alpha'}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\right)\tau(x\,\alpha'\,|\,y\,\beta') = \Gamma_{\beta'\beta\varepsilon\varphi}\,\Gamma_{\alpha\alpha'\gamma\delta}\,\tau(x\,\alpha'\,x\,\delta\,y\,\varphi\,|\,y\,\varepsilon\,x\,\gamma\,y\,\beta') + (\gamma^0\,C\,\gamma^0\,\gamma^{\mu})_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial y^{\mu}}\,\delta(x-y) + i\,\Gamma_{\alpha\alpha'\gamma\delta}\,\delta(x-y)\,[-C_{\alpha'\beta}\,\tau(x\,\delta\,|\,y\,\gamma) + C_{\delta\beta}\,\tau(x\,\alpha'\,|\,y\,\gamma)]. \tag{9}$$

Das Verfahren führt also zu einem unendlichen Gleichungssystem, das folgendermaßen abgebrochen wird: die T-Produkte werden in bekannter Weise mit Hilfe des WICK-Theorems durch Normalprodukte (φ-Funktionen) ausgedrückt und die Funktion mit $r+1$ Veränderlichen wird vernachlässigt. Die φ-Funktionen werden durch die WICKsche Entwicklung sowie die Form der Kontraktionsfunktionen S^c definiert; die richtige Wahl von S^c ist also problematisch. Im folgenden wird zur Bestimmung von S^c eine Gleichung gesucht, die die notwendige Bedingung der Vernachlässigbarkeit der Funktionen φ mit Variablenzahl 4 und 6 ist. Zu diesem Zwecke werden die τ-Funktionen auf beiden Seiten der Gl. (9) mit φ-Funktionen ausgedrückt und die φ-Funktionen mit Variablenzahl 4 und 6 vernachlässigt. Unter Berücksichtigung der Bedingungen 1 – 3 zerfällt Gl. (9) in folgende zwei Gleichungen:

$$\left(i\,\gamma^{\mu\,T}_{\beta\beta'}\frac{\partial}{\partial z^{\mu}}\right)\left(i\,\gamma^{\nu}_{\alpha\alpha'}\frac{\partial}{\partial z^{\nu}}\right)S^c_{\alpha'\beta'}(z) = \Gamma_{\beta'\beta\varepsilon\varphi}\,\Gamma_{\alpha\alpha'\gamma\delta}[S^c_{\alpha'\varepsilon}(z)\,S^c_{\varphi\gamma}(-z)\,S^c_{\delta\beta'}(z) - S^c_{\alpha'\beta'}(z)\,S^c_{\varphi\gamma}(-z)\,S^c_{\delta\varepsilon}(z)] + i(\gamma^0\,C\,\gamma^0\,\gamma^{\mu})_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial z^{\mu}}\,\delta(z) + i\,\Gamma_{\alpha\alpha'\gamma\delta}\,\delta(z)\,[-C_{\alpha'\beta}\,S^c_{\delta\gamma}(z) + C_{\delta\beta}\,S^c_{\alpha'\gamma}(z)]\,, \tag{10}$$

[4] $\{\gamma^{\mu},\gamma^{\nu}\} = 2\,g^{\mu\nu}$, $g^{00} = -g^{11} = -g^{22} = -g^{33} = 1$, $g^{\mu\nu} = 0$ für $\mu \neq \nu$.

[5] $a = \tfrac{1}{2}(1+i\,\gamma^5)$, $\bar{a} = \tfrac{1}{2}(1-i\,\gamma^5)$.

[6] Vgl. z. B. P. T. MATTHEWS u. A. SALAM, Proc. Roy. Soc., Lond. A **221**, 128 [1954]; W. ZIMMERMANN, Nuovo Cim. Suppl. **11**, 43 [1954].

wo $\quad z = x - y \quad$ und

$$\left(i\gamma^{\mu T}_{\beta\beta'}\frac{\partial}{\partial y^\mu}\right)\left(-i\gamma^{\mu}_{\alpha\alpha'}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)\varphi(x\,\alpha'\,|\,y\,\beta') = -\Gamma_{\beta'\beta\varepsilon\varphi}\,\Gamma_{\alpha\alpha'\gamma\delta}[S^c(x\,\alpha'\,|\,y\,\varepsilon)\,S^c(x\,\delta\,|\,y\,\beta')\,\varphi(y\,\varphi\,|\,x\,\gamma)$$
$$-S^c(x\,\alpha'\,|\,y\,\beta')\,S^c(x\,\delta\,|\,y\,\varepsilon)\,\varphi(y\,\varphi\,|\,x\,\gamma) + S^c(x\,\alpha'\,|\,y\,\varepsilon)\,S^c(y\,\varphi\,|\,x\,\gamma)\,\varphi(x\,\delta\,|\,y\,\beta')$$
$$-S^c(x\,\alpha'\,|\,y\,\beta')\,S^c(y\,\varphi\,|\,x\,\gamma)\,\varphi(x\,\delta\,|\,y\,\varepsilon) - S^c(x\,\delta\,|\,y\,\varepsilon)\,S^c(y\,\varphi\,|\,x\,\gamma)\,\varphi(x\,\alpha'\,|\,y\,\beta') \tag{11}$$
$$+S^c(x\,\delta\,|\,y\,\beta')\,S^c(y\,\varphi\,|\,x\,\gamma)\,\varphi(x\,\alpha'\,|\,y\,\varepsilon)] + i\,\Gamma_{\alpha\alpha'\gamma\delta}\,\delta(x-y)\,[-C_{\alpha'\beta}\,\varphi(x\,\delta\,|\,y\,\gamma) + C_{\delta\beta}\,\varphi(x\,\alpha'\,|\,y\,\gamma)]\,.$$

Das Ergebnis erscheint trivial, da (10) die kovariante Näherungsgleichung der Fortpflanzungsfunktion

$$\frac{1}{i}S^{c'}(x\,\alpha\,|\,y\,\beta) = \langle 0\,|\,T\,\Psi(x\,\alpha)\;\overline{\Psi}(y\,\beta)\,|\,0\rangle$$

im Falle der Vernachlässigung der Korrelationen höherer Ordnung ist. Es ist wesentlich, daß auf Grund dieser Ableitung in Gl. (11) die Lösung S^c der Gl. (10) verwendet werden muß, und diese ist die „beste" Funktion; die Anwendung irgendeiner anderen Fortpflanzungsfunktion, auch des exakten Propagators $S^{c'}$, kann die Lösung der Gl. (11) verderben. (Die φ-Funktionen mit vier Veränderlichen können nicht vernachlässigt werden.) Es wäre z. B. unrichtig, in Gl. (11) die S^c-Funktion mit einer Funktion von Källen–Lehmann-Form zu nähern, wenn die „gute" Lösung (die genauere Definition s. weiter unten) von (10) in dieser Form nicht darstellbar ist. Ähnlich ist die Lage auch bei den Perturbationsmethoden. Beispielsweise kann die Anwendung des exakten Propagators zu falschem Ergebnis führen, wenn die Vertexfunktion nicht in genügend hoher Näherung berücksichtigt wird. Mit anderen Worten: wenn es eine S^c-Funktion gibt, bei deren Anwendung die Gln. (7) und (8) abbrechbar sind, so tritt eine annähernde Kompensation der höheren Korrelationen auf. Die Berücksichtigung eines Teiles der Korrelationen kann also einen beträchtlichen Fehler verursachen. Im allgemeinen Falle läßt sich der „beste" S^c-Propagator leider nicht eindeutig definieren, da die Lösungen des abgebrochenen kovarianten Gleichungssystems der τ-Funktionen in der Gestalt der Wick-Produkte nicht darstellbar sind. Folglich ist die Separation der Gleichung der Fortpflanzungsfunktion von dem Gleichungssystem der φ-Funktionen nicht möglich.

Im weiteren bezeichnen wir die r-te Näherung der Funktion $\tau(m\,|\,n)$ mit $\tau^{(r)}(m\,|\,n)$. Die Funktion $\tau^{(r)}(m\,|\,n)$ ist die Lösung des durch die Vernachlässigung der Funktion

$$\varphi(m_r+1\,|\,n_r+1), \qquad m_r+n_r=r$$

abgebrochenen τ-Gleichungssystems. Wir verwenden in diesem Gleichungssystem die Fortpflanzungsfunktion $S^{c(r)}$ und nehmen ohne Beweis an, daß die Fortpflanzungsfunktionen

$$\ldots S^{c(r-1)},\; S^{c(r)},\; S^{c(r+1)}\ldots \tag{12}$$

in solcher Weise angegeben werden können, daß die entsprechenden Funktionen

$$\ldots\tau^{(r-1)}(m\,|\,n),\;\tau^{(r)}(m\,|\,n),\;\tau^{(r+1)}(m\,|\,n)\ldots \tag{13}$$

konvergieren, wenn $r\to\infty$. Die Funktionen (13) nennen wir im folgenden „gute" Propagatoren. Zur Berechnung der „guten" $S^{c(r)}$-Propagatoren schlagen wir die Variationsmethode vor: $S^{c(r)}$ ist so zu bestimmen, daß folgende Forderung erfüllt sei:

$$I_r = \int\ldots\int \mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_{m_r}\,\mathrm{d}y_1\ldots\mathrm{d}y_{n_r}$$
$$\cdot\chi(m_r\,|\,n_r)\,\overline{\varphi}(m_r\,|\,n_r)\,\varphi(m_r\,|\,n_r) = \mathrm{Min}\,, \tag{14}$$

wo $\varphi(m_r\,|\,n_r)$ die φ-Funktion größter Veränderlichenzahl und $\chi(m_r\,|\,n_r)$ eine in geeigneter Weise erwählte positive Gewichtsfunktion ist.

Natürlich ist es nicht gewiß, daß unser Verfahren im obigen Sinne konvergent oder daß die Konvergenz in jedem Falle genügend ist. Es ist nämlich möglich, daß die Wick-artige Separation der Koordinaten der φ-Funktionen nicht immer eine genügend gute Näherung ist. Darum kann die Einführung einer solchen Verallgemeinerung der Wickschen Reihenentwicklung angebracht sein, wo auch Kontraktionsfunktionen höherer Veränderlichenzahl auftreten. Die obigen, mit der Konvergenz verknüpften Bemerkungen können auch auf diesen Fall ohne weiteres verallgemeinert werden.

Wir bemerken, daß die obigen Verallgemeinerungen des „neuen Tamm–Dancoff-Verfahrens" im allgemeinen sehr verwickelt sind. Wir erwarten dagegen, daß die „gute" Lösung der Gl. (10) außer der Gl. (11) auch in anderen Fällen erfolgreich verwendbar ist. Zusammenfassend betonen wir, daß einerseits die Anwendung des „guten" Propagators einer niederen Näherung in höheren Näherungen die Ergebnisse verderben kann, und daß andererseits für die Gestalt des $S^{c'}$ exakt Propagators aus der S^c-Fortpflanzungsfunktion keine sicheren Folgerungen gezogen werden können.

II. Die Untersuchung der Fortpflanzungsfunktion

Im weiteren nehmen wir an, daß Gl. (10) eine „gute" (vgl. Kap. I) Lösung hat, wobei die Forderungen 1. LORENTZ-Invarianz, 2. Mikrokausalität, 3. die üblichen Analysierbarkeitsbedingungen [3] erfüllt sind, und wir geben ein Näherungsverfahren für die Bestimmung dieser Funktion. Wenn die Kopplungskonstante gleich Null, und die Matrix C in den Vertauschungsrelationen (5) von Null verschieden ist, ist diese Lösung offenbar vom Neutrino-Propagator-Typ. Wenn $\lambda \neq 0$ und $C \neq 0$ ist, existieren in der HEISENBERGschen nichtlinearen Theorie keine Lösungen, bei welchen die Bedingungen $1-3$ erfüllt sein können. Ganz anders ist die Lage bei der Kopplung (4). Dann kann nämlich Gl. (10) mit den folgenden Neutrino-Fortpflanzungsfunktionen befriedigt werden:

$$S^c(x) = S^{cR}(x) = \bar{a}\, i\, \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} D^{c(0)}(x) \quad \text{für } C = \bar{a}\,, \tag{15}$$

$$S^c(x) = S^{cL}(x) = a\, i\, \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} D^{c(0)}(x) \quad \text{für } C = a\,, \tag{16}$$

wo
$$D^{c(0)}(x) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \, \frac{e^{ikx}}{k^2 + i\,\varepsilon}\,. \tag{17}$$

Wenn wir (15) oder (16) in (10) einsetzen, ist unter Berücksichtigung von (4) leicht nachweisbar, daß das erste und dritte Glied verschwindet (bei der Auswertung des dritten Gliedes ist ein entsprechender Grenzübergang notwendig). Demzufolge sind Gln. (15) bzw. (16) tatsächlich spezielle Lösungen.

Im folgenden arbeiten wir eine Methode zur annähernden Bestimmung einer „guten" (vgl. Kap. I) Fortpflanzungsfunktion $S^c(x)$ aus. Die Näherung der gesuchten speziellen Lösung nehmen wir in folgender Form an:

$$S^c(x) = S^{cR}(x) + S^{c\varkappa R} \quad \text{für } C = \bar{a}\,, \tag{18}$$

$$S^c(x) = S^{cL}(x) + S^{c\varkappa L} \quad \text{für } C = a\,, \tag{19}$$

wo $S^{c\varkappa R}(x)$ bzw. $S^{c\varkappa L}(x)$ auf dem Lichtkegel verschwindet. Setzen wir nämlich (18) bzw. (19) in Gl. (10) ein, dann verschwindet die letzte Klammer, weiter die Glieder der ersten Klammer, welche drei S^{cR}- bzw. S^{cL}-Faktoren enthalten; zum Schluß können die Glieder der ersten Klammer, welche ein oder zwei S^{cR}- bzw. S^{cL}-Faktoren enthalten, in erster Näherung vernachlässigt werden. Die weiteren Berechnungen werden im Impulsraum durchgeführt. Mit

$$S^{c\varkappa}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p \, e^{ipx}\, S^{c\varkappa}(p)$$

erhalten wir die folgende Integralgleichung zur annähernden Bestimmung der Funktion $S^{c\varkappa}$:

$$\gamma^{\mu\,T}_{\beta\beta'}\, p_\mu\, \gamma^\nu_{\alpha\alpha'}\, p_\nu\, S^{c\varkappa}_{\alpha'\beta'}(p) = -\frac{1}{(2\pi)^8}\, \Gamma_{\beta'\beta\varepsilon\varphi}\, \Gamma_{\alpha\alpha'\gamma\delta}$$
$$\cdot \iint d^4k\, d^4q\, [S^{c\varkappa}_{\alpha'\varepsilon}(k)\, S^{c\varkappa}_{\varphi\gamma}(k-p+q)\, S^{c\varkappa}_{\delta\beta'}(k) - S^{c\varkappa}_{\alpha'\beta'}(k)\, S^{c\varkappa}_{\varphi\gamma}(k-p+q)\, S^{c\varkappa}_{\delta\varepsilon}(k)]\,. \tag{20}$$

Das Wesentliche unseres Näherungsverfahrens ist folgendes: es wird gezeigt, daß die Lösung $S^{c\varkappa}(p)$ in der verallgemeinerten Spektralform

$$S^{c\varkappa 0}(p) = \int_0^\infty d\varkappa^2\, \varrho(\varkappa^2)\, \frac{m(\varkappa^2) + \gamma^m p_m}{\varkappa^2 - p^2 - i\,\varepsilon} \tag{21}$$

genähert werden kann, und die Funktionen $\varrho(\varkappa^2)$ und $m(\varkappa^2)$ werden so bestimmt, daß die Näherung befriedigend sein soll. Es ist ersichtlich, daß die Bedingungen $1-3$ erfüllt sind, und weiter, daß die LEHMANN–KÄLLEN- sowie die PAULI–VILLARS-artigen Spektralformen Spezialfälle sind. Mit elementaren Umformungen folgt

$$\gamma^{\mu\,T}_{\beta\beta'}\, p_\mu\, \gamma^\nu_{\alpha\alpha'}\, p_\nu\, S^{c\varkappa 0}_{\alpha'\beta'}(p) = p^2\, S^{c\varkappa 0}_{\alpha\beta}(p)\,. \tag{22}$$

Die rechte Seite der Gl. (20) kann mit Berücksichtigung der Näherung (21) mit den üblichen Integrationsverfahren ausgewertet werden [7]. Zu diesem Zwecke schreiben wir den Nenner des Integranden von (21) in folgender Form:

$$\frac{1}{\varkappa^2 - p^2 - i\,\varepsilon} = i \int_0^\infty d\alpha \exp\{i\,\alpha(p^2 - \varkappa^2 + i\,\varepsilon)\}\,. \tag{23}$$

Die in (20) auftretenden vierdimensionalen Integrale können aus der bekannten Formel

$$\int d^4k \exp\{i(a\,k^2 + b^\mu k_\mu)\} = -i\,\frac{\pi^2}{a^2} \exp\left\{-i\,\frac{b^2}{4\,a}\right\} \quad \text{für} \quad a > 0 \tag{24}$$

abgeleitet werden. Die anderen vierdimensionalen Integrale sind aus (24) durch Differenzieren nach den Komponenten von b darstellbar.

[7] Vgl. z. B. N. N. BOGOLIUBOV u. D. V. SHIRKOV, Introduction to the Theory of Quantized Fields, Interscience Publishers, Inc., New York 1959.

Zuerst bestimmen wir das folgende Integral $I^{(2)}_{\alpha'\varepsilon\varphi\gamma}(p) = \int d^4k\, S^{c\varkappa 0}_{\alpha'\varepsilon}(k)\, S^{c\varkappa 0}_{\varphi\gamma}(k-p)$. (25)

Mit Berücksichtigung von (24) folgt

$$I^{(2)}(p) = \pi^2 \int_0^\infty d\varkappa_1^2\, \varrho(\varkappa_1^2) \int_0^\infty d\varkappa_2^2\, \varrho(\varkappa_2^2) \int_0^\infty d\alpha_1 \int_0^\infty d\alpha_2 \frac{1}{(\alpha_1+\alpha_2)^2} \tag{26}$$

$$\cdot \exp\left[-(\alpha_1+\alpha_2)\,\varepsilon + i\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}p^2 - i\,\alpha_1\varkappa_1^2 - i\,\alpha_2\varkappa_2^2\right]\left\{i\left[M^{(0)} + M^{(1)}\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2} + M^{(2)}\frac{\alpha_2^2}{(\alpha_1+\alpha_2)^2}\right] - \overline{M}^{(0)}\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2}\right\}.$$

Die M-Matrizen enthalten die Veränderlichen α_1 und α_2 nicht (diese sind im Anhang B angegeben). Im weiteren werden die Spinorindizes – ähnlich wie in (26) – nur dann gezeichnet, wenn es notwendig ist. Durch Einführung der neuen Veränderlichen $\alpha_1 = \eta\,\xi_1$, $\alpha_2 = \eta(1-\xi_1)$ (27)

erhalten wir

$$I^{(2)} = \pi^2 \int_0^\infty d\varkappa_1^2\, \varrho(\varkappa_1^2) \int_0^\infty d\varkappa_2^2\, \varrho(\varkappa_2^2) \int_0^1 d\xi_1\, F^{(2)}(\varepsilon\,\xi_1, \varkappa_1\varkappa_2) \tag{28}$$

mit

$$F^{(2)}(\varepsilon\,\xi_1\,\varkappa_1\,\varkappa_2) = \int_0^\infty d\eta \left\{\frac{i}{\eta}\, e^{-\eta\varepsilon} f^{(2)}(\eta)\,\left[M^{(0)} + M^{(1)}(1-\xi_1) + M^{(2)}(1-\xi_1)^2\right] - \frac{1}{\eta^2}\, e^{-\eta\varepsilon} f^{(2)}(\eta)\, \overline{M}^{(0)}\right\}, \tag{29}$$

$$f^{(2)}(\eta) = \exp\{-i\,\eta[\varkappa_{12}^2 - \xi_1(1-\xi_1)\,p^2]\}, \qquad \varkappa_{12}^2 = \xi_1\varkappa_1^2 + (1-\xi_1)\,\varkappa_2^2. \tag{30}$$

Zur Durchführung der Integration nach η formen wir das zweite Glied des Integrals (29) durch partielle Integration um:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^\infty d\eta\, \frac{1}{\eta^2}\, e^{-\eta\varepsilon} f^{(2)}(\eta) = -\left[\frac{1}{\eta}\, e^{-\eta\varepsilon} f^{(2)}(\eta)\right]_0^\infty + \int_0^\infty d\eta\, \frac{1}{\eta}\, e^{-\eta\varepsilon}\, \frac{\partial}{\partial\eta} f^{(2)}(\eta)\,. \tag{31}$$

Der aus dem ersten divergenten Glied stammende Beitrag des Integrals (28) verschwindet nur dann (wovon wir uns mit Berücksichtigung der konkreten Gestalt der Matrizen M überzeugen können), wenn

$$\int d\varkappa^2\, \varrho(\varkappa^2) = 0 \qquad \text{und} \qquad \int d\varkappa^2\, \varrho(\varkappa^2)\, m(\varkappa^2) = 0\,. \tag{32 a), (33 a}$$

Die Funktion $S^{c\varkappa}(x)$ verschwindet auf dem Lichtkegel, wenn auch die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$\int d\varkappa^2\, \varrho(\varkappa^2)\, \varkappa^2 = 0\,, \qquad \int d\varkappa^2\, \varrho(\varkappa^2)\, m(\varkappa^2)\, \varkappa^2 = 0\,. \tag{32 b), (33 b}$$

Wir werden sehen, daß durch die Erfüllung der Forderungen (32 a) und (33 a) sämtliche bei den Integrationen auftretenden Divergenzen eliminiert werden. Die Integration (29) kann durch Differentiation nach ε durchgeführt werden, und es ergibt sich

$$I^{(2)}(p) = \pi^2 \int_0^\infty d\varkappa_1^2\, \varrho(\varkappa_1^2) \int_0^\infty d\varkappa_2^2\, \varrho(\varkappa_2^2) \int_\varepsilon^\infty d\varphi_1 \int_0^1 d\xi_1 [K + K^m p_m + K^{mn} p_{mn}]\, \frac{1}{\varkappa_{12}^2 - \xi_1(1-\xi_1)\,p^2 - i\,\varphi_1}, \tag{34}$$

wo die Matrizen die Veränderliche p nicht enthalten. (Diese sind im Anhang B zu finden.) Das Integral

$$I^{(3)}_{\alpha'\varepsilon\varphi\gamma\delta\beta'}(p) = \iint d^4k\, d^4q\, S^{c\varkappa 0}_{\alpha'\varepsilon}(k)\, S^{c\varkappa 0}_{\varphi\gamma}(k-p+q)\, S^{c\varkappa 0}_{\delta\beta'}(q) = \int d^4q\, I^{(2)}_{\alpha'\varepsilon\varphi\gamma}(q)\, S^{c\varkappa 0}_{\delta\beta'}(p-q) \tag{35}$$

kann ganz ähnlich dem vorhergehenden berechnet werden. Die Einzelheiten sind in Anhang A angegeben. Durch Weiterführung der Rechnung erhält man

$$I^{(3)}(p) = \pi^4 \int \dots \int_\varepsilon^\infty d\varphi_1 \int_\varepsilon^\infty d\varphi_2 \int_0^1 d\xi_1 \int_0^1 d\xi_2 (1-\xi_2)\,[(P - i\,\xi_2\,\varphi_1\,Q) + (P^r - i\,\xi_2\,\varphi_1\,Q^r)\, p_r + P^{rs} p_r p_s + P^{rst} p_r p_s p_t]$$

$$\cdot \frac{1}{\varkappa_{123}^2 - v\,p^2 - i\,\xi_2\,\varphi_1 - i(1-\xi_2)\,\varphi_2}, \tag{36}$$

wo
$$\int \ldots = \int_0^\infty d\varkappa_1^2\, \varrho(\varkappa_1^2) \int_0^\infty d\varkappa_2^2\, \varrho(\varkappa_2^2) \int_0^\infty d\varkappa_3^2\, \varrho(\varkappa_3^2)\,.$$

Die P- und Q-Matrizen, sowie $\varkappa_{123}^2$ und v sind Funktionen der Veränderlichen ξ_1 und ξ_2, aber sie enthalten die Veränderlichen p, φ_1 und φ_2 nicht. [Siehe Anhang B, Formeln (B 1) – (B 10).]

Das Integral nach φ_1 und φ_2 kann auf elementarem Wege berechnet werden. Divergente Glieder treten in $I^{(3)}$ nur dann nicht auf, wenn die Forderungen (32) und (33) erfüllt werden. Durch elementare Rechnung erhält man

$$I^{(3)}(p) = -\pi^4 \int \ldots \int_0^1 d\xi_1 \int_0^1 d\xi_2\, T' \ln(\varkappa_{123}^2 - v\, p^2)$$
$$= -\pi^4 \int \ldots \int_0^1 d\xi_1 \int_0^1 d\xi_2\, T' \ln \frac{\varkappa_{123}^2}{m_0^2} - \pi^4 \int \ldots \int_0^1 d\xi_2 \int_0^1 d\xi_1\, T' \ln\left(1 - \frac{v}{\varkappa_{123}^2}\, p^2\right), \tag{37}$$

wo
$$T' = \frac{1}{\xi_2}\left[(P + P^r p_r + P^{rs} p_r p_s + P^{rst} p_r p_s p_t)(\varkappa_{123}^2 - v\, p^2) - \tfrac{1}{2}(Q + Q^r p_r)(\varkappa_{123}^2 - v\, p^2)^2\right] \tag{38}$$

[m_0 ist infolge der Forderungen (32) und (33) eine willkürlich wählbare konstante Masse]. Das zweite Integral ist durch partielle Integration umformbar

$$I^{(3)}(p) = -\pi^4 \int \ldots \int_0^1 d\xi_1 \int_0^1 d\xi_2\, T' \ln \frac{\varkappa_{123}^2}{m_0^2} - \pi^4 \int \ldots \int_0^1 d\xi_2 \left[T \ln\left(1 - \frac{v}{\varkappa_{123}^2}\, p^2\right)\right]_{\xi_1=0}^{\xi_1=1} \tag{39}$$

$$+ p^2 \pi^4 \int \ldots \int_0^1 d\xi_2 \int_0^1 d\xi_1 \left[-\frac{\varkappa_{123}^2}{v}\left(\frac{\partial}{\partial \xi_1}\frac{v}{\varkappa_{123}^2}\right)\right] T\, \frac{1}{\frac{\varkappa_{123}^2}{v} - p^2 - i\,\varepsilon}\,, \qquad \text{wo} \quad T = \int_a^{\xi_1} d\xi_1\, T'. \tag{40}$$

Mit Berücksichtigung der konkreten Form der Funktionen v und T ist es ersichtlich, daß das zweite Integral bei beliebigen Werten der Konstanten a gleich Null ist. Das dritte Integral ist unabhängig von a, wie es auch in diesem Falle sein muß.

Folgende Funktion

$$S_{\alpha\beta}^{c\varkappa 1}(p) = -\frac{1}{(2\pi)^8}\frac{1}{p^2}\, \Gamma_{\beta'\beta\varepsilon\varphi}\, \Gamma_{\alpha\alpha'\gamma\delta}\, \left(I^{(3)}_{\alpha'\varepsilon\varphi\gamma\delta\beta'}\left[S^{c\varkappa 0}(p)\right] - I^{(3)}_{\alpha'\beta'\varphi\gamma\delta\varepsilon}\left[S^{c\varkappa 0}(p)\right]\right) \tag{41}$$

wird die erste Iteration der Funktion $S^{c\varkappa 0}$ genannt. Wenn die gesuchte Lösung von Gl. (10) in verallgemeinerter Spektralform (21) approximierbar ist, so differieren die Funktionen $p^2 S^{c\varkappa 0}(p)$ und $p^2 S^{c\varkappa 1}(p)$ nicht bedeutend voneinander. Die Näherung $S^{c\varkappa 0}$ der Fortpflanzungsfunktion kann man also aus der Variationsforderung

$$\int d^4p\, w(p)\, (\bar{S}^{c\varkappa 1}(p) - \bar{S}^{c\varkappa 0}(p)),\ (S^{c\varkappa 1}(p) - S^{c\varkappa 0}(p)) = \mathrm{Min} \tag{42}$$

bestimmen, wo $w(p)$ eine in geeigneter Weise gewählte (im wesentlichen mit der Konvergenz zusammenhängende) Gewichtsfunktion ist. Im weiteren werden wir sehen, daß das Problem wesentlich vereinfacht werden kann. Wir bezeichnen das in der verallgemeinerten Spektralform (21) darstellbare Glied der Funktion $S^{c\varkappa 1}$ mit $S^{c\varkappa s}$. Mit Berücksichtigung der Formeln (38), (39) und (41) ist es leicht einzusehen, daß

$$S_{\alpha\beta}^{c\varkappa s}(p) = \int \ldots \int_0^1 d\xi_1 \int_0^1 d\xi_2\, R\, \frac{M\,\delta_{\alpha\beta} + \gamma_{\alpha\beta}^r p_r}{\frac{\varkappa_{123}^2}{v} - p^2 - i\,\varepsilon}\,, \tag{43}$$

wo

$$R\, M\, \delta_{\alpha\beta} = -\frac{1}{(2\pi)^8}\, \Gamma_{\beta'\beta\varepsilon\varphi}\, \Gamma_{\alpha\alpha'\gamma\delta}\, \frac{\varkappa_{123}^2}{v}\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1}\frac{v}{\varkappa_{123}^2}\right)\frac{1}{\xi_2}\int_a^{\xi_1} d\xi_1\, (\varkappa_{123}^2 P - \tfrac{1}{2}\varkappa_{123}^4 Q)_{\alpha'\varepsilon\varphi\gamma\delta\beta'} - (\varkappa_{123}^2 P - \tfrac{1}{2}\varkappa_{123}^4 Q)_{\alpha'\beta'\varphi\gamma\delta\varepsilon}\,, \tag{44}$$

$$R\,\delta_{\alpha\beta} = -\frac{1}{(2\pi)^8}\,\Gamma_{\beta'\beta''\varepsilon\varphi}\,\Gamma_{\alpha\alpha'\gamma\delta}\,\frac{\varkappa_{123}^2}{v}\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1}\frac{v}{\varkappa_{123}^2}\right)\frac{1}{\xi_2}\int\limits_a^{\xi_1}\mathrm{d}\xi_1\,[(\varkappa_{123}^2\,P^0-\tfrac{1}{2}\,\varkappa_{123}^4\,Q^0)_{\alpha'\varepsilon\varphi\gamma\delta\beta'} - (\varkappa_{123}^2\,P^0-\tfrac{1}{2}\,\varkappa_{123}^4\,Q^0)_{\alpha'\beta'\varphi\gamma\delta\varepsilon}]\,\gamma^0_{\beta''\beta}\,. \tag{45}$$

Im Falle der Gl. (3) sind die Faktoren $R\,M$ und R

$$R\,M = -\frac{\lambda^2}{(2\pi)^4}\,m(\varkappa_1)\,m(\varkappa_2)\,m(\varkappa_3)\,\frac{\varkappa_{123}^2}{v}\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1}\frac{v}{\varkappa_{123}^2}\right)\frac{1}{\xi_2}\int\limits_a^{\xi_1}\mathrm{d}\xi_1\,\varkappa_{123}^2\,u^2\,, \tag{46}$$

$$R = -\frac{5}{4}\,\frac{\lambda^2}{(2\pi)^4}\,\frac{\varkappa_{123}^2}{v}\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1}\frac{v}{\varkappa_{123}^2}\right)\frac{1}{\xi_2}\int\limits_a^{\xi_1}\mathrm{d}\xi_1\,\{\varkappa_{123}^2\,\varkappa_{12}^2\,[u^2-(1-\xi_2)\,u^3] + \tfrac{1}{2}\,\varkappa_{123}^4\,\xi_1(1-\xi_1)\,[-3\,u^3+\tfrac{9}{2}\,(1-\xi_2)\,u^4]\}\,. \tag{47}$$

Die Funktionen u und v sind im Anhang B zu finden [siehe die Formeln (B 8) und (B 9)]. Die verallgemeinerte Spektralform (21) erhält man aus (43) durch die Substitution

$$\varkappa^2 = \varkappa_{123}^2/v\,, \qquad x = x(\xi_1,\xi_2)\,, \tag{48}$$

wo $x(\xi_1\,\xi_2)$ eine in geeigneter Weise gewählte Funktion ist. Wir bezeichnen die in der Spektralform (21) nicht darstellbaren Glieder von $S^{c\varkappa 1}$ mit $S^{c\varkappa n}$. Vernachlässigen wir im ersten Schritt die Funktion $S^{c\varkappa n}$, dann ergibt die Variationsforderung (42) die Gleichung $S^{c\varkappa 0} = S^{c\varkappa s}$.

Die in der Lösung $S^{c\varkappa\bar{s}}$ auftretenden Funktionen $\varrho(\varkappa^2)$ und $m(\varkappa^2)$ erfüllen folgende Integralgleichungen

$$\varrho(\varkappa^2)\,m(\varkappa^2) = \sum_i \int\ldots\int\limits_{g_i(\varkappa^2)}\mathrm{d}x\,R_M(\varkappa_1,\varkappa_2,\varkappa_3,\quad \xi_{1i}(x\,\varkappa),\xi_{2i}(x\,\varkappa))\left|\frac{\partial(\xi_{1i},\xi_{2i})}{\partial(\varkappa,x)}\right|;\quad R_M = R\,M\,, \tag{49}$$

$$\varrho(\varkappa^2) = \sum_i \int\ldots\int\limits_{g_i(\varkappa^2)}\mathrm{d}x\,R(\varkappa_1,\varkappa_2,\varkappa_3,\quad \xi_{1i}(x\,\varkappa),\xi_{2i}(x\,\varkappa))\left|\frac{\partial(\xi_{1i},\xi_{2i})}{\partial(\varkappa,x)}\right|. \tag{50}$$

Nach der Bestimmung der Bereiche G_i, in welchen die Funktionaldeterminante $\left|\dfrac{\partial(\varkappa,x)}{\partial(\xi_{1i},\xi_{2i})}\right|$ nicht verschwindet, können die Intervalle $g_i(\varkappa^2)$ berechnet werden. Die Gln. (49) und (50) sind wahrscheinlich am einfachsten durch Iteration zu lösen.

Wir setzen die Lösungen der Gln. (49) und (50) in (41) ein. Das erste Glied ist wegen der Forderungen (32) und (33) sowie dem im Integranden auftretenden Logarithmus nicht bedeutend. Weiter nehmen wir an, daß ein Impulsquadrat existiert, bei dem die Forderungen

$$S^{c\varkappa\bar{s}}(p) \leqq \Delta \quad \text{für} \quad p^2 \geqq p^2_{\max}\,, \qquad S^{c\varkappa n}(p) \leqq \Delta \quad \text{für} \quad p^2 < p^2_{\max} \tag{51), (52}$$

erfüllt sind, wo Δ genügend klein ist. Um diese Annahme zu bestätigen, vergleichen wir im Falle der Kopplung (4) je ein Glied von $S^{c\varkappa\bar{s}}$ und $S^{c\varkappa n}$

$$G^{c\varkappa\bar{s}} = \frac{\lambda^2}{(2\pi)^4}\int\ldots\int\limits_0^1\mathrm{d}\xi_1\int\limits_0^1\mathrm{d}\xi_2\,m(\varkappa_1)\,m(\varkappa_2)\,m(\varkappa_3)\,\frac{\varkappa_{123}^2}{v}\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1}\frac{v}{\varkappa_{123}^2}\right)\frac{1}{\xi_2}\left(\int\limits_a^{\xi_1}\mathrm{d}\xi_1\,\varkappa_{123}^2\,u^2\right)\frac{1}{\dfrac{\varkappa_{123}^2}{v}-p^2-i\,\varepsilon}\,, \tag{53}$$

$$G^{c\varkappa n} = -\frac{\lambda^2}{(2\pi)^4}\int\ldots\int\limits_0^1\mathrm{d}\xi_1\int\limits_0^1\mathrm{d}\xi_2\,m(\varkappa_1)\,m(\varkappa_2)\,m(\varkappa_3)\,\frac{\varkappa_{123}^2}{v}\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1}\frac{v}{\varkappa_{123}^2}\right)\frac{1}{\xi_2}\left(\int\limits_a^{\xi_1}\mathrm{d}\xi_1\,v\,u^2\right)\frac{p^2}{\dfrac{\varkappa_{123}^2}{v}-p^2-i\,\varepsilon}\,. \tag{54}$$

Die Berücksichtigung der konkreten Form der Funktion v [Formel (B 9)] macht die Erfüllung der Forderungen (51) und (52) sehr plausibel (z. B. $v<1$ im ganzen Integrationsbereich). Eine ganz ähnliche Untersuchung ist bei den anderen Gliedern durchführbar.

Wir betonen, daß der Faktor P^{rs} bei der Kopplung (4) verschwindet; also ist die Konstante Δ in (51) und (52) kleiner als im allgemeinen bei anderen Kopplungen.

Wir bringen die Funktion $S^{c\varkappa 0}$ in folgende Form:

$$S^{c\varkappa 0}(p) = S^{c\varkappa\bar{s}}(p) \quad \text{für } p^2 \leqq p^2{}_{\max},$$
$$S^{c\varkappa 0}(p) = 0 \quad \text{für } p^2 > p^2{}_{\max}. \qquad (55)$$

Es ist offenbar, daß auch die obige Funktion in Form (21) darstellbar ist. Aus den Ergebnissen folgt, daß $S^{c\varkappa 0}$ die erste Iteration $S^{c\varkappa 1}$ im ganzen p-Raum genügend nähert. Allgemeiner abgefaßt kann (55) zur Lösung der Variationsforderung (42) als eine Variationsannahme angesehen werden.

Unsere Methode ermöglicht also die annähernde Bestimmung einer Lösung, die in Spektralform (21) nicht *exakt* darstellbar ist.

Wenn $C = a$ oder $C = \bar{a}$ ist, suchen wir die Näherungslösung $S^{c\varkappa 0}$, mit welcher die Normierungsbedingungen (32 a), (32 b), (33 a) und (33 b) erfüllt sind. [Wenn $C = 0$ ist, müssen nur die Bedingungen (32 a) und (33 a) erfüllt werden.]

Wir bemerken, daß eine einfache Funktion vom PAULI–VILLARS-Typ in der Nähe von $p = 0$ gewiß eine schlechte Näherung ist. Unter Berücksichtigung von Gl. (37) ist nämlich leicht ersichtlich, daß $S^{c\varkappa 0}(0) = 0$. Die Fortpflanzungsfunktion $S^{c\varkappa 0}(p)$ weicht also wahrscheinlich wesentlich von dem Propagator des freien Teilchens der linearen Theorie ab. Die Amplitude $\varphi(x\,\alpha\,|\,y\,\beta)$ in Gl. (11) kann aber schon endliche Ruheenergie haben, und ihr Schwerpunkt kann sich im geeigneten Falle ähnlich den Amplituden des BOSE-Teilchens der linearen Theorie benehmen.

Wir betonen, daß die Glieder $S^{c\varkappa n}$ die Folgen des Näherungscharakters von (21) sind und nicht beweisen, daß man die Fortpflanzungsfunktion in der Form (21) nicht nähern könne.

In Gl. (10) wurden die Glieder der ersten Klammer vernachlässigt, welche ein oder zwei S^{cR}- bzw. S^{cL}-Faktoren enthalten. Diese Glieder können mit der diskutierten Methode ohne besondere Schwierigkeit berücksichtigt werden. [Infolge der Bedingungen (32) und (33) treten keine Divergenzen auf.]

III. Die Grundlagen einer einheitlichen Theorie der Elementarteilchen

Auf Grund des oben Gesagten können wir die Begründung einer einheitlichen Theorie der Elementarteilchen versuchen. Im Zusammenhang mit diesem Problem müssen wir die grundlegenden Arbeiten von HEISENBERG, sowie die Weiterentwicklungen derselben durch HEISENBERG und Mitarb. hervorheben [8–15]. An dieser Stelle gehen wir auf ihre Ergebnisse nicht ausführlich ein, sondern wir verweisen auf die Originalarbeiten.

Im folgenden werden unsere Grundvoraussetzungen, die die Wahl der LAGRANGE-Funktion und der Vertauschungsrelationen begründen, zusammengefaßt:

1. Die Form der LAGRANGE-Funktion und der Vertauschungsrelationen sei einfach.

2. Die Forderungen der relativistischen Invarianz und der Mikrokausalität müssen erfüllt sein.

3. Genau wie in der HEISENBERGschen Theorie wird vorausgesetzt, daß sich die Gleichungen nicht auf ein spezielles Teilchen (Elektron, Meson, Proton), sondern im allgemeinen auf die Materie beziehen. Die verschiedenen Teilchen entsprechen verschiedenen Zuständen.

4. Wir wählen eine Darstellung des Spinoroperators der Materie, bei der die Bewegungsgleichung von erster Ordnung ist. Das Wechselwirkungsglied hat nämlich in den Gleichungen erster Ordnung bei den meisten Wechselwirkungen die einfachste Form [16]. Es kann also angenommen werden, daß dies auch in der einheitlichen Theorie der Fall ist.

5. Der Operator Ψ der Materie ist ein Spinordublett. Demzufolge ist

$$\Psi = \begin{pmatrix}\Psi_1\\ \Psi_2\end{pmatrix},$$

wo Ψ_1 und Ψ_2 Spinoren mit 4-Komponenten sind. Im Falle von Bewegungsgleichungen erster Ordnung mit Vierkomponenten-Spinoroperatoren ist es uns nicht gelungen, die in der Natur vorkommenden wichtigsten Zustände herzustellen.

[8] W. HEISENBERG, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen 1953, S. 111.
[9] W. HEISENBERG, Z. Phys. **144**, 1 [1956].
[10] W. HEISENBERG, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen 1956, S. 27.
[11] W. HEISENBERG, Nucl. Phys. **29**, 269 [1957].
[12] W. HEISENBERG, Rev. Mod. Phys. **29**, 269 [1957].
[13] W. HEISENBERG, F. KORTEL u. H. MITTER, Z. Naturforschg. **10 a**, 425 [1955].
[14] R. ASCOLI u. W. HEISENBERG, Z. Naturforschg. **12 a**, 177 [1957].
[15] H. P. DÜRR, W. HEISENBERG, H. MITTER, S. SCHLIEDER u. K. YAMAZAKI, Z. Naturforschg. **14 a**, 442 [1959].
[16] Vgl. z. B. R. P. FEYNMAN u. M. GELL-MANN, Phys. Rev. **109**, 193 [1958].

6. Ψ_1 ist positives, Ψ_2 neutrales Feld. Die Bewegungsgleichungen und die Vertauschungsrelationen müssen also in der Weise konstruiert werden, daß aus ihnen als Näherung die Quantenelektrodynamik ableitbar ist. Es soll sich ferner ergeben, daß die geladenen Teilchen eine endliche elektrische Ladung haben und daß die elektrische Ladung der neutralen Teilchen hingegen genau gleich Null ist. Die Voraussetzung 6. kann eigentlich in zwei Voraussetzungen zerlegt werden: 6 a) Die Ladung der neutralen Teilchen ist genau (und nicht nur in bestimmter Näherung) gleich Null. 6 b) Die auf Grund obiger Forderungen konstruierten Gleichungen sind sehr einfach. Es ist daher überflüssig, von einer anderen Darstellung des Ψ-Spinordubletts auszugehen.

Aus dem oben Gesagten folgt, daß die einheitliche Theorie kein Massenglied enthalten kann; sonst wären die Teilchen mit Masse Null – das Neutrino und das Photon – aus der Theorie nicht ableitbar. Das hat zur Folge, daß die Massen sämtlicher Elementarteilchen aus dem Wechselwirkungsglied stammen. Wenn also die Kopplungskonstante λ gleich Null gesetzt wird, stimmen unsere Gleichungen z. B. mit den Gleichungen der Nukleonen überein, wenn in diesen die Kopplungskonstanten und die Massen vernachlässigt werden. Wir nehmen folglich für unsere LAGRANGE-Funktion folgende Form an:

$$L = \frac{i}{2} \sum_{i=1}^{2} \left(\overline{\Psi}_i \gamma^\mu \frac{\partial \Psi_i}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \overline{\Psi}_i}{\partial x^\mu} \gamma^\mu \Psi_i \right) + \lambda L_w .$$

7. Wir nehmen an, daß L_w eine Wechselwirkung vom FERMI-Typ ist; das ist nämlich die einfachste Möglichkeit, die Forderungen 2 zu erfüllen. Auf eine ähnliche Voraussetzung ist auch die HEISENBERGsche nichtlineare Theorie gegründet (vergleiche auch [17–21]).

8. Die Theorie ist gegenüber den Transformationen

$$\Psi_1' = e^{i\alpha} \Psi_1, \quad \Psi_2' = e^{i\beta} \Psi_2 \qquad (57), (58)$$

invariant. Diese Invarianzeigenschaften sind mit der Erhaltung der Fermionenzahl verbunden.

9. Die LAGRANGE-Funktion und die Vertauschungsrelationen sind gegenüber der „totalen TOUSCHEK-Transformation"

$$\begin{pmatrix} \Psi_1' \\ \Psi_2' \end{pmatrix} = e^{i\alpha\gamma^5} \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} \qquad (59)$$

invariant. Wir nennen die zur Invarianz (59) gehörende, sich erhaltende Größe die totale TOUSCHEK-Ladung. Nach unserer Voraussetzung folgt die Erhaltung der Baryonenzahl aus der Erhaltung der totalen TOUSCHEK-Ladung Q_T. In einem Eigenzustand Φ_T der totalen TOUSCHEK-Ladung *kann* der Eigenwert Q_T von Null verschieden sein, wenn

$$\langle 0 | \Psi_i(x) | \Phi_T \rangle = 0 \qquad (60)$$

ist, z. B. wenn die τ-Funktionen kleinster Veränderlichenzahl vom Typ

$$\tau(x_1 i_1 x_2 i_2 | y_1 j_1) = \langle 0 | T \, \Psi_{i_1}(x_1) \; \Psi_{i_2}(x_2) \; \overline{\Psi}_{j_1}(y_1) | \Phi_T \rangle \qquad (61)$$

sind. In den konventionellen Theorien entspricht (61) einem stark gebundenen System. Der Zerfall des Zustandes Φ_T wird eben durch die Erhaltung der totalen TOUSCHEK-Ladung verhindert. Die Nukleonen werden nach unserer Theorie durch die Linearkombinationen der Wellenfunktionen vom Typ (61) beschrieben. Anschaulich gesagt ist der Begriff der Baryonenzahl der älteren Theorien mit der „Struktur" der Teilchen verbunden.

Wir betonen, daß die Ruhemasse auch in einem Eigenzustand Φ_T der totalen TOUSCHEK-Ladung von Null abweichen kann, wenn die Bedingung (60) erfüllt ist. Es ist nicht beweisbar, daß in diesen Zuständen im Falle von nicht-TOUSCHEK-invarianten S^c die Ruheenergie immer verschwinde.

Wir bemerken, daß die neue HEISENRGsche Gleichung auch gegen die TOUSCHEK-Transformation invariant ist. Aber die Bedeutung dieser Invarianz ist ganz verschieden, da in dieser Gleichung Spinoren vom GÜRSEY-Typ auftreten.

10. Die LAGRANGE-Funktion ist P- und isoinvariant mit isoskalarer Kopplung. Unsere Voraussetzung wird durch die bei starken Wechselwirkungen beobachtete P- und Isoinvarianz begründet; die isoskalare Kopplung ist die einfachste Möglichkeit [22].

11. Die P- und Isoinvarianz ist in der Natur bekanntlich nicht genau erfüllt. In den konventionellen Feldtheorien werden deswegen solche Glieder in die LAGRANGE-Funktion eingesetzt, bei denen die Verletzung der P- und Isoinvarianz gesichert ist (elektromagnetische Wechselwirkung, schwache Wechsel-

[17] E. FERMI, Z. Phys. **88**, 161 [1934].
[18] W. HEISENBERG, Z. Phys. **101**, 533 [1936].
[19] D. IWANENKO, Phys. Z. Sowjetunion **13**, 131 [1938].
[20] E. FERMI u. N. C. YANG, Phys. Rev. **76**, 1739 [1949].
[21] D. IWANENKO u. A. BRODSKY, C. R. Acad. Sci. URSS **84**, 683 [1952].
[22] P: $\psi(\boldsymbol{x}, x^0) \to \gamma_0 \, \psi(-\boldsymbol{x}, x^0)$.

wirkungen). Diese LAGRANGE-Funktionen widersprechen aber unserem Einfachheitsprinzip.

In Verbindung mit dem obigen Problem haben wir folgende Voraussetzung: wegen der Form der Vertauschungsrelationen existieren keine P- und isoinvarianten Anfangsbedingungen für den Spinor-Operator Ψ. Die einfachste Möglichkeit ist folgende Wahl der gleichzeitigen Vertauschungsrelationen:

$$[\Psi_1(x^0\,\boldsymbol{x}\,\alpha),\,\overline{\Psi}_1(x^0\,\boldsymbol{y}\,\beta)]_+=(\bar{a}\,\gamma^0)_{\alpha\beta}\,\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}), \quad (62)$$

$$[\Psi_2(x^0\,\boldsymbol{x}\,\alpha),\,\overline{\Psi}_2(x^0\,\boldsymbol{y}\,\beta)]_+=0\,. \quad (63)$$

Für die weiteren Paare ist der Kommutator gleich Null. Solche Vertauschungsrelationen können nur im Rahmen einer indefiniten Metrik im HILBERT-Raum vorkommen.

Unter Berücksichtigung der Voraussetzungen 1 bis 11 sowie der Ergebnisse von I. und II. ist die LAGRANGE-Funktion fast eindeutig konstruierbar:

$$L=\frac{i}{2}\sum_{i=1}^{2}\left(\overline{\Psi}_i\,\gamma^\mu\,\frac{\partial\Psi_i}{\partial x^\mu}-\frac{\partial\overline{\Psi}_i}{\partial x^\mu}\,\gamma^\mu\,\Psi_i\right)$$
$$+\lambda\sum_{i,j=1}^{2}(\overline{\Psi}_i\,\gamma^\mu\,a\,\Psi_i)(\overline{\Psi}_j\,\gamma_\mu\,\bar{a}\,\Psi_j)\,. \quad (64)$$

Im Falle der obigen LAGRANGE-Funktion gibt es nämlich so eine Lösung der Näherungsgleichung des Propagators, wobei die diskutierten Forderungen erfüllt sind. Es ist weiterhin sehr plausibel, daß keine Divergenzen in der Theorie vorkommen. Wenn in die LAGRANGE-Funktion die Matrix a statt der Matrix $\bar{a}$ gesetzt wird, so ist die Bewegungsgleichung für $a\,\Psi$ von $\bar{a}\,\Psi$ unabhängig; diese Möglichkeit muß daher ausgeschlossen werden. Wir bemerken, daß die Verletzung der P- und Isoinvarianz durch Quantisierung in der HEISENBERGschen Theorie nicht möglich ist, da dort sämtliche Kommutatoren auf einer raumartigen Hyperfläche verschwinden.

Es ist gleich zu ersehen, daß (64) gegen die Transformationen

$$\Psi_1'=e^{i\alpha\gamma^5}\,\Psi_1\,,\quad \Psi_2'=e^{i\beta\gamma^5}\,\Psi_2 \quad (65),(66)$$

invariant ist. Die entsprechenden, sich erhaltenden Größen werden positive bzw. neutrale TOUSCHEK-Ladung genannt. Wenn die LAGRANGE-Funktion (64) richtig ist, sind das Proton und das Neutron die mit demselben Eigenwert der totalen TOUSCHEK-Ladung verbundenen Eigenzustände. Aber sie sind keine Eigenzustände der positiven, bzw. neutralen TOUSCHEK-Ladung. Das ist offenbar möglich. Die Erhaltung der positiven bzw. der negativen TOUSCHEK-Ladung also bremst nur und verhindert nicht den Prozeß $\mathrm{n}\to\mathrm{p}+\mathrm{e}^-+\bar{\nu}$.

Es ist offensichtlich, daß die Formeln und die Ergebnisse von I. und II. auch im Falle der LAGRANGE-Funktion (64) und der Vertauschungsrelationen (62) – (63) gültig sind, wenn die Matrizen $\Gamma_{\alpha\beta\gamma\delta}$ und $C_{\alpha\beta}$ entsprechend verallgemeinert werden (dann sind $\alpha, \beta\ldots$ die üblichen Isospinorenindizes). In die Vertauschungsrelation (5) soll z. B. mit Berücksichtigung von (62) und (63) die Matrix

$$C=\begin{pmatrix}\bar{a} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \quad (67)$$

statt $\bar{a}$ eingesetzt werden. Die Verletzung der Isoinvarianz folgt aus der nicht-isoinvarianten Matrix C.

Im folgenden wird gezeigt, daß die Vertauschungsrelationen (62) und (63) mit der Voraussetzung 6. in Einklang stehen. Erst wird nachgewiesen, daß die mit Berücksichtigung des Isospins verallgemeinerte Gleichung der Amplitude

$$\varphi_\gamma(x\,|\,y)=\langle 0\,|\,T\,\overline{\Psi}_1(x)\;\Psi_1(y)\,|\,\Phi_\gamma\rangle \quad (68)$$

eine photonartige stationäre Lösung besitzt. Diese Lösung folgt aus dem die Funktion $\delta(x-y)$ enthaltenden, nicht-isoinvarianten Glied der verallgemeinerten Gl. (11). (Wie in I. gezeigt wurde, stammt dieses Glied von der Funktion $C\,\gamma^0\,\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$ des Kommutators.) Im folgenden werden die die δ-Funktion nicht enthaltenden P- und isoinvarianten Glieder vernachlässigt und die äquivalente gleichzeitige Wellenfunktion bestimmt. Die Funktion $\varphi_\gamma(x\,|\,y)$ erfüllt das Gleichungssystem

$$-i\,\gamma^\mu\,\frac{\partial}{\partial x^\mu}\,\varphi_\gamma(x\,|\,y)$$
$$=-\lambda\,\gamma^\mu\,a\,\varphi(x\,|\,x)\;\gamma_\mu\,\bar{a}\,\frac{1}{i}\,S^c_{11}\,(x-y), \quad (69)$$

$$\frac{\partial}{\partial y^\mu}\,\varphi_\gamma(x\,|\,y)\;i\,\gamma^\mu$$
$$=-\lambda\,\frac{1}{i}\,S^c_{11}\,(x-y)\;\gamma_\mu\,a\,\varphi(y\,|\,y)\;\gamma^\mu\,\bar{a}\,, \quad (70)$$

wo $\quad \frac{1}{i}\,S^c_{11}\,(x-y)=\langle 0\,|\,T\,\Psi_1(x)\;\overline{\Psi}_1(y)\,|\,0\rangle\,.$

Mit Berücksichtigung der Zusammenhänge

$$i\,\frac{\partial}{\partial x^0}\,\varphi(\boldsymbol{x}\,x^0\,|\,\boldsymbol{y}\,x^0)$$
$$=\lim_{y^0\to x^0} i\left[\frac{\partial}{\partial x^0}\,\varphi(x\,|\,y)+\frac{\partial}{\partial y^0}\,\varphi(x\,|\,y)\right] \quad (71)$$

und (18) folgt nach einem entsprechenden Grenzübergang bei den δ-Funktionen

$$i \frac{\partial}{\partial x^0} \Psi_{\alpha\beta}(\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{y}\,x^0) = \sum_{r=1}^{3} \Big[i(\gamma^0 \gamma^r)_{\alpha\alpha'} \frac{\partial}{\partial x^r} \Psi_{\alpha'\beta}(\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{y}\,x^0) + i(\gamma^0 \gamma^r)_{\beta\beta'} \frac{\partial}{\partial y^r} \Psi_{\alpha\beta'}(\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{y}\,x^0) \Big] \quad (72)$$
$$+ \lambda\, \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\, (\gamma^0 \gamma^\mu a)_{\alpha\alpha'} (\gamma^0 \gamma_\mu a)_{\beta\beta'} \Psi_{\alpha'\beta'}(\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{y}\,x^0)$$

mit $\Psi = \varphi\, C'$, wo C' die Matrix der Ladungskonjugation ist. Die zu Gl. (72) gehörende Eigenwertgleichung ist ein Spezialfall der von ROSEN und SINGER ausführlich diskutierten Gleichung [23]. Bezüglich der Einzelheiten der Berechnungen verweisen wir hier auf die Originalarbeit; die von unserem Standpunkt wichtigsten Ergebnisse sind folgende: Sie geben die Lösung der Eigenwertgleichung im Ruhesystem im Falle des endlichen Potentialtopfes bei endlicher Ruheenergie an. Hiernach ist die Lösung des Eigenwertproblems mit entsprechendem Grenzübergang möglich.

Es ist nachweisbar, daß Gl. (72) lokalisierte Lösungen mit der Ruhenergie Null besitzt und daß die Schwerpunktbewegung durch die MAXWELLschen Gleichungen beschrieben wird. Bei der Reihenentwicklung des 16-Komponenten-Spinors $\Psi_{\alpha\beta}$ nach den 16 unabhängigen DIRAC-Matrix-Produkten treten nur skalare und Tensor-Komponenten auf.

Hiernach beweisen wir, daß die Ladung der neutralen Teilchen gleich Null ist. Es ist offenbar, daß es im Falle der Amplitude

$$\varphi(x\,|\,y) = b_\gamma\, \varphi_\gamma(x\,|\,y) + b_0\, \varphi_0(x\,|\,y)\,, \quad (73)$$

$$\varphi_0(x\,|\,y) = \langle 0\,|\,T\, \Psi_2(x)\, \overline{\Psi}_2(y)\,|\,\Phi_\gamma\rangle \quad (74)$$

bei $b_0 \neq 0$ keine photonartige Lösung gibt, da infolge der Vertauschungsrelationen (63) zwischen den neutralen Teilchen keine Kontakt-Wechselwirkung vom δ-Typ auftritt. Das Glied

$$\lambda(\overline{\Psi}_2 \gamma^\mu a\, \Psi_2)\, (\overline{\Psi}_2 \gamma_\mu \bar{a}\, \Psi_2)$$

der LAGRANGE-Funktion kann also zwischen den neutralen Teilchen keine elektromagnetische Wechselwirkung erzeugen. Die neutralen Teilchen erhalten auch keine elektrische Ladung vom Glied

$$\lambda(\overline{\Psi}_2 \gamma^\mu a\, \Psi_2)\, (\overline{\Psi}_1 \gamma_\mu \bar{a}\, \Psi_1)\,,$$

da der Spinor des Photons $\Psi_{\alpha\beta}$ nur skalare und tensorielle Komponenten besitzt. Von der zweiten Klammer resultiert also bei der Spurbildung immer Null. Ganz ähnlich ist die Lage auch beim Glied

$$\lambda(\overline{\Psi}_1 \gamma^\mu a\, \Psi_1)\, (\overline{\Psi}_2 \gamma_\mu \bar{a}\, \Psi_2)\,.$$

Eine elektromagnetische Wechselwirkung kann nur vom Glied

$$\lambda(\overline{\Psi}_1 \gamma^\mu a\, \Psi_1)\, (\overline{\Psi}_1 \gamma_\mu \bar{a}\, \Psi_1)$$

resultieren; mit anderen Worten: nur die Ladung der „geladenen" Teilchen kann von Null verschieden sein. Wir bemerken, daß irgendeine Normierung der Amplitude $\varphi_\gamma(x\,|\,y)$ keinen Sinn hat. Der Wert $\overline{\varphi}_\gamma(x\,|\,x)\, \varphi_\gamma(x\,|\,x)$ ist mit der elementaren elektrischen Ladung e verbunden, ist also auf Grund der kovarianten Näherungsgleichung eines „geladenes-Fermion-Photon-Systems" zu bestimmen.

Da Ψ_1 als positives Feld angenommen wurde, sichert die Wahl

$$C = \begin{pmatrix} \bar{a} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

den beobachteten Spiegelungscharakter der Elektronen. (Bei der Wahl

$$C = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist Ψ_1 ein negatives Feld.) So haben wir vollständig bewiesen, daß die Vertauschungsrelationen (62) und (63) mit der Voraussetzung 6. in Einklang stehen.

Nach der Theorie von ROSEN und SINGER ist das Photon ein Neutrino-Antineutrino-Paar. Die Ladung Null der neutralen Teilchen ist dagegen aus unserer Theorie nur dann ableitbar, wenn das Photon als ein geladenes-Fermion-Antifermion-Paar angenommen wird.

Im weiteren fassen wir unsere wichtigsten Voraussetzungen zusammen, deren Beweis wir von der quantitativen Untersuchung der Theorie erwarten.

Die totale TOUSCHEK-Ladung ist bei den Baryonen von Null verschieden, bei den anderen Teilchen gleich Null. Auf Grund dieser Voraussetzung kann die Stabilität der Baryonen begründet werden.

Die π-Mesonen bilden annähernd ein Isotriplett und sind daher durch die Amplituden

$$\pi^+ \to \langle 0\,|\,T\, \Psi_1(x)\, \overline{\Psi}_2(y)\,|\,\Phi\rangle\,,$$
$$\pi^0 \to \frac{1}{\sqrt{2}} [\langle 0\,|\,T\, \Psi_1(x)\, \overline{\Psi}_2(y)\,|\,\Phi\rangle + \langle 0\,|\,T\, \Psi_2(x)\, \overline{\Psi}_2(y)\,|\,\Phi\rangle]\,,$$
$$\pi^- \to \langle 0\,|\,T\, \Psi_2(x)\, \overline{\Psi}_1(y)\,|\,\Phi\rangle$$

beschrieben.

[23] N. ROSEN u. P. SINGER, Bull. Res. Counc. Israel **8 F** [1959].

Der Erfahrung nach besitzen die K-Mesonen den Spin 0, dagegen einen halbzahligen Isospin. Diese Tatsache kann – wie eine Annäherung – aus unserer Theorie folgen, da die Isoinvarianz verletzt wird. Wir nehmen daher an, daß die K-Mesonen in einem „asymmetrischen" Zustand sind. Als klassisches Beispiel kann das Wasserstoffatom erwähnt werden, dessen Isospin gleich $\frac{1}{2}$ ist.

Die Hyperonenzustände können durch die entsprechende Verallgemeinerung des Modells von GOLDHABER [24] und GYÖRGYI [25] konstruiert werden. (Nach diesem Modell sind die Hyperonen aus Nukleonen und Anti-K-Mesonen zusammengesetzte Systeme.) Wenn solche Hyperonenzustände existieren, kann die bekannte Theorie von GELL-MANN und NISHIJIMA begründet werden.

Auf Grund des oben Gesagten sind die wichtigsten Aufgaben unserer Theorie die folgenden: 1. Annähernde Berechnung der Fortpflanzungsfunktion; 2. Die Bestimmung der Struktur und der Ruhmasse der wichtigsten Elementarteilchen; 3. Die Bestimmung der Form und der Kopplungskonstanten der wichtigsten Wechselwirkungen.

Endlich heben wir hervor, daß die Wahl der Kopplungskonstante λ nur die Festsetzung des Maß-Systems bedeutet. Unsere Theorie enthält also keine empirische Konstante.

Anhang A

Wir schreiben den Nenner des Integranden (34) in Integralform

$$\frac{1}{\varkappa_{12}^2-\xi_1(1-\xi_1)\,q^2-i\,\varphi_1}=i\int_0^\infty d\alpha_1 \exp\{i\,\alpha_1[\xi_1(1-\xi_1)\,q^2-\varkappa_{12}^2+i\,\varphi_1]\}\,. \tag{A 1}$$

Mit Berücksichtigung von (23), (24) und (A 1) kann (35) in folgender Form ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} I^{(3)}=\pi^4\int\ldots\int_\varepsilon^\infty d\varphi_1\int_0^1 d\xi_1\int_0^\infty d\varphi_1\int_0^\infty d\alpha_3\,&\frac{1}{[\alpha_1\,\xi_1(1-\xi_1)+\alpha_3]^2}\exp\left[-\alpha_1\,\varphi_1-\alpha_3\,\varepsilon+i\,\frac{\alpha_1\,\alpha_3\,\xi_1(1-\xi_1)}{\alpha_1\,\xi_1(1-\xi_1)+\alpha_3}-i\,\alpha_1\,\varkappa_{12}^2-\alpha_3\,\varkappa_3^2\right]\\ \cdot\Bigg\{i\Bigg[N^{(0)}+N^{(1)}\,&\frac{\alpha_3}{\alpha_1\,\xi_1(1-\xi_1)+\alpha_3}+N^{(2)}\,\frac{\alpha_3^2}{[\alpha_1\,\xi_1(1-\xi_1)+\alpha_3]^2}+N^{(3)}\,\frac{\alpha_3^3}{[\alpha_1\,\xi_1(1-\xi_1)+\alpha_3]^3}\Bigg]\\ -\Bigg[\overline{N}^{(0)}\,&\frac{1}{\alpha_1\,\xi_1(1-\xi_1)+\alpha_3}+\overline{N}^{(1)}\,\frac{\alpha_3}{[\alpha_1\,\xi_1(1-\xi_1)+\alpha_3]^2}\Bigg]\Bigg\} \end{aligned} \tag{A 2}$$

mit der Bezeichnung

$$\int\ldots=\int_0^\infty d\varkappa_1^2\,\varrho(\varkappa_1^2)\int_0^\infty d\varkappa_2^2\,\varrho(\varkappa_2^2)\int_0^\infty d\varkappa_3^2\,\varrho(\varkappa_3^2)\,. \tag{A 3}$$

Die Matrizen N enthalten die Veränderlichen α_1 und α_3 nicht und sind in Anhang B zu finden. Mit Einführung der neuen Veränderlichen

$$\alpha_1=\eta\,\xi_2\,,\qquad \alpha_3=\eta(1-\xi_2) \tag{A 4}$$

erhalten wir

$$I^{(3)}=\pi^4\int\ldots\int_\varepsilon^\infty d\varphi_1\int_0^1 d\xi_1\int_0^1 d\xi_2\,F^{(3)}(\varepsilon\,\varphi_1\,\xi_1\,\xi_2\,\varkappa_1\,\varkappa_2\,\varkappa_3) \tag{A 5}$$

mit

$$\begin{aligned} F^{(3)}(\varepsilon\,\varphi_1\,\xi_1\,\xi_2\,\varkappa_1\,\varkappa_2\,\varkappa_3)=\int_0^\infty d\eta\,\Bigg\{&\frac{i}{\eta}\,e^{-\eta(1-\xi_2)\varepsilon}\,f^{(3)}(\eta)\,[N^{(0)}\,u^2+N^{(1)}(1-\xi_2)\,u^3+N^{(2)}(1-\xi_2)^2\,u^4+N^{(3)}(1-\xi_2)^3\,u^5]\\ &-\frac{1}{\eta^2}\,e^{-\eta(1-\xi_2)\varepsilon}\,f^{(3)}(\eta)\,[\overline{N}^{(0)}\,u^3+\overline{N}^{(1)}(1-\xi_2)\,u^4]\,, \end{aligned} \tag{A 6}$$

wo

$$f^{(3)}(\eta)=\exp\{-i\,\eta(\varkappa_{123}^2-v\,p^2-i\,\xi_2\,\varphi_1)\}\,. \tag{A 7}$$

$\varkappa_{123}^2$, u und v sind Funktionen der Veränderlichen ξ_1, ξ_2 und sind in (B 7), (B 8) und (B 9) angegeben.

Das zweite Glied von (A 6) – ähnlich wie in (31) – formen wir durch partielle Integration um. Die Integration (A 6) ist dann durch Differenzieren nach ε durchführbar, und die auftretenden Divergenzen fallen infolge der Erfüllung der Forderungen (32) und (33) aus.

[24] M. GOLDHABER, Phys. Rev. **101**, 433 [1956].

[25] G. GYÖRGYI, J. Exp. Theor. Phys., USSR **32**, 152 [1957]; Soviet Phys. J. Exp. Theor. Phys., URRS **5**, 152 [1957].

Anhang B

$$M^{(0)}_{\alpha'\varepsilon\varphi\gamma} = m(\varkappa_1)\, m(\varkappa_2)\, \delta_{\alpha'\varepsilon}\, \delta_{\varphi\gamma} - m(\varkappa_1)\, \delta_{\alpha'\varepsilon}\, \gamma^m_{\varphi\gamma}\, p_m\,, \qquad M^{(2)}_{\alpha'\varepsilon\varphi\gamma} = \gamma^m_{\alpha'\varepsilon}\, \gamma^n_{\varphi\gamma}\, p_m\, p_n\,,$$

$$M^{(1)}_{\alpha'\varepsilon\varphi\gamma} = [m(\varkappa_1)\, \delta_{\alpha'\varepsilon}\, \gamma^m_{\varphi\gamma} + m(\varkappa_2)\, \gamma^m_{\alpha'\varepsilon}\, \delta_{\varphi\gamma} - \gamma^m_{\alpha'\varepsilon}\, \gamma^n_{\varphi\gamma}\, p_n]\, p_m\,, \qquad \overline{M}^{(0)}_{\alpha'\varepsilon\varphi\gamma} = \tfrac{1}{2}\, \gamma^m_{\alpha'\varepsilon}\, \gamma^n_{\varphi\gamma}\, g_{mn}\,.$$

$$K_{\alpha'\varepsilon\varphi\gamma} = m(\varkappa_1)\, m(\varkappa_2)\, \delta_{\alpha'\varepsilon}\, \delta_{\varphi\gamma} + \tfrac{1}{2}\, \varkappa^2_{12}\, \gamma^m_{\alpha'\varepsilon}\, \gamma^n_{\varphi\gamma}\, g_{mn}\,,$$

$$K^m_{\alpha'\varepsilon\varphi\gamma} = -m(\varkappa_1)\, \xi_1\, \delta_{\alpha'\varepsilon}\, \gamma^m_{\varphi\gamma} + m(\varkappa_2)\, (1-\xi_1)\, \gamma^m_{\alpha'\varepsilon}\,,$$

$$K^{mn}_{\alpha'\varepsilon\varphi\gamma} = -\xi_1 (1-\xi_1)\, \gamma^m_{\alpha'\varepsilon}\, \gamma^n_{\varphi\gamma} - \tfrac{1}{2}\, \xi_1 (1-\xi_1)\, \gamma^{\overline{m}}_{\alpha'\varepsilon}\, \gamma^{\overline{n}}_{\varphi\gamma}\, g_{\overline{mn}}\, g^{mn} \quad \text{mit} \quad \varkappa^2_{12} = \xi_1\, \varkappa_1{}^2 + (1-\xi_1)\, \varkappa_2{}^2.$$

$$N^{(0)}_{\alpha'\varepsilon\varphi\gamma\delta\beta'} = K_{\alpha'\varepsilon\varphi\gamma}\, (m(\varkappa_3)\, \delta_{\delta\beta'} + \gamma^p_{\delta\beta'}\, p_p)\,,$$

$$N^{(1)}_{\alpha'\varepsilon\varphi\gamma\delta\beta'} = [-K_{\alpha'\varepsilon\varphi\gamma}\, \gamma^p_{\delta\beta'} + K^p_{\alpha\varepsilon\varphi\gamma}\, (m(\varkappa_3)\, \delta_{\delta\beta'} + \gamma^r_{\delta\beta'}\, p_r)]\, p_p\,,$$

$$N^{(2)}_{\alpha'\varepsilon\varphi\gamma\delta\beta'} = [-K^m_{\alpha'\varepsilon\varphi\gamma}\, \gamma^n_{\delta\beta'} + K^{mn}_{\alpha'\varepsilon\varphi\gamma}\, (m(\varkappa_3)\, \delta_{\delta\beta'} + \gamma^p_{\delta\beta'}\, p_p)]\, p_m\, p_n\,,$$

$$N^{(3)}_{\alpha'\varepsilon\varphi\gamma\delta\beta'} = -K^{mn}_{\alpha'\varepsilon\varphi\gamma}\, \gamma^p_{\delta\beta'}\, p_m\, p_n\, p_p\,,$$

$$\overline{N}^{(0)}_{\alpha'\varepsilon\varphi\gamma\delta\beta'} = \tfrac{1}{2}\, [-K^m_{\alpha'\varepsilon\varphi\gamma}\, \gamma^n_{\delta\beta'} + K^{mn}_{\alpha'\varepsilon\varphi\gamma}\, (m(\varkappa_3)\, \delta_{\delta\beta'} + \gamma^p_{\delta\beta'}\, p_p)]\, g_{mn}\,,$$

$$\overline{N}^{(1)}_{\alpha'\varepsilon\varphi\gamma\delta\beta'} = -\tfrac{1}{2}\, K^{mn}_{\alpha'\varepsilon\varphi\gamma}\, \gamma^p_{\delta\beta'}\, (p_m\, g_{np} + p_n\, g_{pm} + p_p\, g_{mn})\,.$$

$$P_{\alpha'\varepsilon\varphi\gamma\delta\beta'} = u^2\, K_{\alpha'\varepsilon\varphi\gamma}\, m(\varkappa_3)\, \delta_{\delta\beta'} + \tfrac{1}{2}\, u^3\, \varkappa^2_{123}\, [-K^m_{\alpha'\varepsilon\varphi\gamma}\, \gamma^n_{\delta\beta'} + K^{mn}_{\alpha'\varepsilon\varphi\gamma}\, m(\varkappa_3)\, \delta_{\delta\beta'}]\, g_{mn}\,, \tag{B 1}$$

$$Q_{\alpha'\varepsilon\varphi\gamma\delta\beta'} = \tfrac{1}{2}\, u^3\, [-K^m_{\alpha'\varepsilon\varphi\gamma}\, \gamma^n_{\delta\beta'} + K^{mn}_{\alpha'\varepsilon\varphi\gamma}\, m(\varkappa_3)\, \delta_{\delta\beta'}]\, g_{mn}\,, \tag{B 2}$$

$$\begin{aligned} P^r_{\alpha'\varepsilon\varphi\gamma\delta\beta'} = {} & u^2\, K_{\alpha'\varepsilon\varphi\gamma}\, \gamma^r_{\delta\beta'} + \tfrac{1}{2}\, u^3\, \varkappa^2_{123}\, K^{mn}_{\alpha'\varepsilon\varphi\gamma}\, g_{mn}\, \gamma^r_{\delta\beta'} + (1-\xi_2)\, u^3\, [-K_{\alpha'\varepsilon\varphi\gamma}\, \gamma^r_{\delta\beta'} + K^r_{\alpha'\varepsilon\varphi\gamma}\, m(\varkappa_3)\, \delta_{\delta\beta'}] \\ & + \tfrac{1}{2}\, (1-\xi_2)\, u^4\, \varkappa^2_{123}\, (N^{rst} + N^{srt} + N^{tsr})_{\alpha'\varepsilon\varphi\gamma\delta\beta'}\, g_{st}\,, \end{aligned} \tag{B 3}$$

$$Q^r_{\alpha'\varepsilon\varphi\gamma\delta\beta'} = \tfrac{1}{2}\, u^3\, K^{mn}_{\alpha'\varepsilon\varphi\gamma}\, g_{mn}\, \gamma^r_{\delta\beta'} + \tfrac{1}{2}\, (1-\xi_2)\, u^4\, (N^{rst} + N^{srt} + N^{tsr})_{\alpha'\varepsilon\varphi\gamma\delta\beta'}\, g_{st}\,, \tag{B 4}$$

$$\begin{aligned} P^{rs}_{\alpha'\varepsilon\varphi\gamma\delta\beta'} = {} & (1-\xi_2)\, u^3\, K^r_{\alpha'\varepsilon\varphi\gamma}\, \gamma^s_{\delta\beta'} + (1-\xi_2)^2\, u^4\, [-K^r_{\alpha'\varepsilon\varphi\gamma}\, \gamma^s_{\delta\beta'} + K^{rs}_{\alpha'\varepsilon\varphi\gamma}\, m(\varkappa_3)\, \delta_{\delta\beta'}] \\ & - \tfrac{1}{2}\, u^3 v\, [-K^m_{\alpha'\varepsilon\varphi\gamma}\, \gamma^n_{\alpha\beta'} + K^{mn}_{\alpha'\varepsilon\varphi\gamma}\, m(\varkappa_3)\, \delta_{\delta\beta'}]\, g_{mn}\, g^{rs}\,, \end{aligned} \tag{B 5}$$

$$\begin{aligned} P^{rst}_{\alpha'\varepsilon\varphi\gamma\delta\beta'} = {} & (1-\xi_2)^2\, u^4\, K^{mn}_{\alpha'\varepsilon\varphi\gamma}\, \gamma^r_{\delta\beta'} - \tfrac{1}{2}\, u^3\, v\, K^{mn}_{\alpha'\varepsilon\varphi\gamma}\, g_{mn}\, g^{rs}\, \gamma^t_{\delta\beta'} + (1-\xi_2)^3\, u^5\, N^{rst}_{\alpha'\varepsilon\varphi\gamma\delta\beta'} \\ & - \tfrac{1}{2}\, (1-\xi_2)\, u^4\, v\, (N^{r\bar{s}\bar{t}} + N^{\bar{s}r\bar{t}} + N^{\bar{t}\bar{s}r})_{\alpha'\varepsilon\varphi\gamma\delta\beta'}\, g_{\bar{s}\bar{t}}\, g^{st} \end{aligned} \tag{B 6}$$

mit den Bezeichnungen

$$\varkappa^2_{123} = \xi_1\, \xi_2 (\varkappa_1{}^2 - \varkappa_2{}^2) + \xi_2 (\varkappa_2{}^2 - \varkappa_3{}^2) + \varkappa_3{}^2\,, \tag{B 7}$$

$$u = \frac{1}{\xi_1\, \xi_2 (1-\xi_1) + (1-\xi_2)}\,, \qquad v = \frac{\xi_1 (1-\xi_1)\, \xi_2 (1-\xi_2)}{\xi_1\, \xi_2 (1-\xi_1) + (1-\xi_2)} \tag{B 8, 9}$$

und

$$N^{rst}_{\alpha'\varepsilon\varphi\gamma\delta\beta'}\, [\xi_1 (1-\xi_1)\, \gamma^r_{\alpha'\varepsilon}\, \gamma^s_{\varphi\gamma} + \tfrac{1}{2}\, \xi_1 (1-\xi_1)\, \gamma^m_{\alpha'\varepsilon}\, \gamma^n_{\varphi\gamma}\, g_{mn}\, g^{rs}]\, \gamma^t_{\delta\beta'}\,. \tag{B 10}$$